

線形システムの低次元化に関する研究

著者	庄司 文啓
号	851
発行年	1986
URL	http://hdl.handle.net/10097/11800

氏 名	しょう じ ふみ ひろ 庄 司 文 啓
授 与 学 位	工 学 博 士
学位授与年月日	昭和 61 年 7 月 9 日
学位授与の根拠法規	学位規則第 5 条第 2 項
最 終 学 歴	昭和 54 年 12 月 オレゴン州立大学大学院工学研究科電気・コンピュー ータ工学専攻博士課程修了
学 位 論 文 題 目	線形システムの低次元化に関する研究
論 文 審 査 委 員	東北大学教授 竹田 宏 東北大学教授 木村 正行 東北大学教授 豊田 淳一 東北大学教授 猪岡 光

論 文 内 容 要 旨

近年制御対象の大規模化に伴い、そのシステム設計・解析もますます複雑、困難になってきており、これに対処するための制御系の設計・解析の方策を確立することが強く要望されている。高次元で表現される大規模システムを直接解析することは、計算機を用いても困難な場合が多い。そこで制御系の設計・解析のための計算機の所要時間数の軽減化をはかることを目的として、高次元システムを低次元モデルで近似してから制御系の設計解析を行う簡略化の手法が研究されてきた。その代表的な手法としては、直接法、連分数法、モーメント法、Hsiaの方法、代表根法、集約化法、特異値分解法、Schwarz form 変換法などであるが、これらの手法を改善した手法、あるいは2つの手法を併用した方法など数多く提唱されている。さらに各手法間の関連性、得られた低次元モデルの過渡応答特性、定常応答特性、周波数応答特性、安定性に関する検討が行われている。またこれらの手法の閉ループ制御系の設計、準最適制御系の構成への応用も試みられている。実際のシステムへの応用も研究されており、原子炉システムの低次元化、ガスタービンモデルの低次元化、発電所プラントの低次元化などが報告されている。低次元モデルに要求される特性は、過渡応答、定常応答、周波数応答等に関して実システムのそれらのよい近似を与えると共に、閉ループ制御系の設計に対しても有効であることである。しかしながら、第2章において詳細に考察するように従来提案されているモデル低次元化法には多くの問題点がある。例えば、連分数法あるいはモーメント法によって得られる低次元モデルは、低次元化すべきもとのシステムが安定でも不安定となる場合

がしばしばあることである。また、代表根法は多重極をもつシステムの低次元化には適用されず、定常状態に対してよい近似を与えない。さらに、代表根の組がいつもよい低次元モデルを与えると限らないことも明らかにされている。これらの諸問題を解決し、上述の低次元モデルに要求される特性を同時に満足する手法を確立することが望まれている。

以上の考察に基づいて本研究では、上記の諸特性を同時に満足する低次元モデルを求めることを目的とする。その手法として、伝達関数（あるいは、状態方程式）で与えられる連続系または離散系に対して、留数と極を交互に最適化することによって低次元モデルを得る二段階くり返しアルゴリズム（Two-Step Iterative Algorithm）を提案する。

次に、モデル低次元化法として広く用いられている連分数法、モーメント法、いずれを用いても特定次数の低次元モデルは得られない場合を“Singularity”または“Generalized Singularity”と呼び、このような状況を生ずるもとのシステムの諸特性について検討する。

最後に、低次元モデルがSingularityを生ずるシステム、あるいは不安定となるシステムに対して、モーメント係数の最小二乗解法を用いて安定な低次元モデルを得る方法を導出する。

本論文は全編6章より構成されており以下にその概要を示す。

第1章 緒 論

本章では、本研究の目的と意義について述べている。

第2章 線形システムの低次元化に関する諸問題

本章では、線形システムの低次元化に関する従来の手法の概要を示し、それらの手法の特徴、問題点、およびその応用について概観する。これらの考察に基づいて、本研究の位置付けを明確にすると共に、その目的を明らかにする。

第3章 二段階くり返し法による線形システムの低次元化

本章では、連続系あるいは離散系で与えられるシステムに対して、留数と極を交互に最適化することによって低次元モデルを得る二段階くり返しアルゴリズムを示している。

連続系の低次元化においては、低次元化すべき n 次元システムは伝達関数、あるいは状態方程式で与えられるものとする。 n 次元システムのステップ応答は、

$$y_n = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{-\lambda_2 t} + \dots + \alpha_m e^{-\lambda_m t} + \dots + \alpha_n e^{-\lambda_n t} \quad (1)$$

で表される。ここで、 $-\lambda_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) は伝達関数の極、すなわち状態方程式の行列 A の固有値であり、互いに異なる負の実数と仮定する。

上記 n 次元システムの m 次元モデル ($m \ll n$) を求める。 m 次元モデルのステップ応答は、

$$\hat{y}_m^r = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\hat{\lambda}_1^r t} + \alpha_2 e^{-\hat{\lambda}_2^r t} + \dots + \alpha_m e^{-\hat{\lambda}_m^r t} \quad (2)$$

で表される。ここで、 $-\hat{\lambda}_i^r$ ($i=1, 2, \dots, m$) は、 m 次元伝達関数モデルの極、すなわち状態方程式

の行列 \hat{A}^r の固有値である。 r ($r=0, 1, \dots$) は、くり返し計算のステップ数である。

各ステップ r において、次の評価関数

$$J_S = \int_0^\infty (y_n - \hat{y}_m^r)^2 dt \quad (3)$$

を最小にする最適な留数 $\hat{\alpha}_i^r$ ($i=0, 1, \dots, m$) と極 $-\hat{\lambda}_i^r$ ($i=1, 2, \dots, m$) を交互に求める二段階くり返しアルゴリズムを用いることにより、最適な低次元モデルを決定する。評価関数(3)はモデルの良さを示す判定基準としても用いられる。このような評価関数を用いたのは、テスト入力としてステップ入力最も典型的なものであるからである。

離散系の低次元化においては、与えられる n 次元システムはパルス伝達関数、あるいは差分方程式で与えられる。最小化すべき評価関数は有限時間 N までの誤差の二乗和を用いる。

Table 1 および Figure 1 に連続系で与えられる4次元システムの2次元化の例を他の手法による結果と共に示す。Table 2 および Figure 2 に離散系で与えられる4次元システムの2次元化の例を示す。例題によって本手法が、実数極をもつシステム、多重極をもつシステム、多変数系の低次元化に適用され従来の手法に比べて過渡応答、定常応答、誤差の二乗積分値（または、誤差の二乗和）の意味において優れていることを示す。さらに本手法によって得られた低次元モデルは、もとのシステムが安定ならば常に安定である。複素極をもつシステムの低次元化への適用に関しては、定式化とアルゴリズムを示している。Davison と共にモデル低次元化の研究の先駆者であるMarshall は、著者の定式化にしたがって、複素極をもつシステムの低次元化を行い本手法の有効性を示している。Marshall はさらに、著者の提案した手法によって得られた低次元モデルの周波数特性、閉ループ制御系の設計への応用に関しても解析し、有効であることを示している。また本手法によって得られる低次元モデルは、異なる2つの基底を交互に用いて直交射影の原理を適用することにより容易に導出される。

第4章 Padé近似法と連分数法による低次元モデルに関する考察

本章では、二つのアルゴリズムPS. Routh アルゴリズム、CF. Routh アルゴリズムを導出することにより、連分数法（Cauer 第1展開法とCauer 第2展開法）およびPadé近似法（Markov parameter 法とモーメント法をいう）によって得られる低次元モデルの等価性を証明する。与えられたシステムの伝達関数の連分数展開において、展開係数が存在しない場合がしばしば生ずる。この場合には、連分数法、モーメント法いずれを用いても特定次数の低次元モデルは得られない。このような状況を“Singularity”と呼ぶ。さらに、連分数展開の展開係数が複数個存在しない場合を“Generalized Singularity”と呼び、低次元モデルがこのような状況を生ずるもとのシステムの諸特性を検討した。次に、PS. Routh アルゴリズムを用いて、連分数法とモーメント法におけるSingular condition（またはGeneralized Singular condition）の等価性を導く。さらに、例題によってSingularity またはGeneralized Singularityを生ずるシステムの諸特性を考察した。

Table 1 Comparison of the iterative method with various second-order reduced models of a fourth-order system

$$\text{Original system: } H_4(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

$$\text{Unit-step response: } y_4 = 1 - e^{-t} - e^{-2t} + 2e^{-3t} - e^{-4t}$$

Reduced model	Unit-step response	Transfer function	$\int_0^\infty (\text{Step response error})^2 dt$
r=5 step OP5	$1 - 1.2277e^{-1.039t}$ $+ 0.2516e^{-2.6655t}$	$\frac{0.239s^2 + 0.6939s + 2.7703}{s^2 + 3.7048s + 2.7703}$	0.00006502
r=4 step OP4	$1 - 1.2239e^{-1.0393t}$ $+ 0.2442e^{-2.6655t}$	$\frac{0.02023s^2 + 0.6963s + 2.7703}{s^2 + 3.7048s + 2.7703}$	0.00006676
r=3 step OP3	$1 - 1.2239e^{-1.0334t}$ $+ 0.2442e^{-2.5641t}$	$\frac{0.0203s^2 + 0.7117s + 2.6497}{s^2 + 3.5975s + 2.6497}$	0.00007157
Second Cauer form (Shieh & Wei)	$1 - 1.2309e^{-1.0435t}$ $+ 0.2309e^{-2.3994t}$	$\frac{0.7305s + 2.5038}{s^2 + 3.4429s + 2.5037}$	0.00012404
N ₃ (Hsia)	$1 - 1.2292e^{-1.0492t}$ $+ 0.2292e^{-2.4032t}$	$\frac{0.7311s + 2.5063}{s^2 + 3.4461s + 2.5063}$	0.00012495
r=2 step OP 2	$1 - 1.2e^{-1.0334t}$ $+ 0.2e^{-2.5641t}$	$\frac{0.7273s + 2.6497}{s^2 + 3.5975s + 2.6497}$	0.00014024
r=1 step OP 1	$1 - 1.2e^{-t}$ $+ 0.2e^{-2t}$	$\frac{0.8s + 2}{s^2 + 3s + 2}$	0.00023915
N ₂ (Hsia) Mixed method (Shieh & Wei)	$1 - \frac{7}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-2t}$	$\frac{0.8333s + 2}{s^2 + 3s + 2}$	0.00033127
N ₁ (Hsia)	$1 - 1.0972e^{-t}$ $+ 0.0278e^{-2t}$	$\frac{-0.0694s^2 + 0.8333s + 2}{s^2 + 3s + 2}$	0.00113126
Routh approximation (Hutton & Friedland)	$1 - e^{-0.8279t}$ $\times \{0.5041 \cos(0.3307t) - 0.1 \sin(0.3307t)\}$	$\frac{0.7947(s+1)}{s^2 + 1.6557s + 0.7947}$	0.00114932
D _n (Davison)	$1 - \frac{11}{12}e^{-t} - \frac{1}{12}e^{-2t}$	$\frac{1.0833s + 2}{s^2 + 3s + 2}$	0.00792561
C ₂ (Chidambara)	$1 - \frac{5}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-2t}$	$\frac{0.4833s + 2}{s^2 + 3s + 2}$	0.01144288
Third Cauer form (Shieh & Wei)	$1 - 0.8843e^{-0.4289t}$ $- 0.1157e^{-5.3657t}$	$\frac{s + 2.3014}{s^2 + 5.7946s + 2.3014}$	0.15485461
r=0 step OP 0 C ₁ (Chidambara) D _m (Davison)	$1 - e^{-t} - e^{-2t}$	$\frac{-s^2 + 2}{s^2 + 3s + 2}$	0.22024248

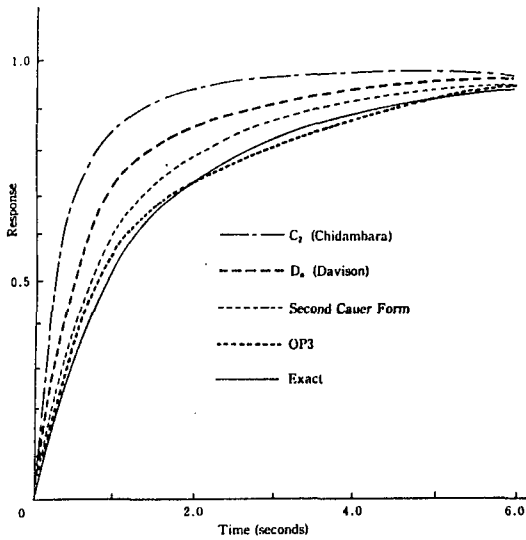


Figure 1 Comparison of unit-step responses according to various methods of second-order reduction of a fourth-order system.

Table 2 Numerical representation of unit-step responses according to various second-order models of a fourth-order system ($N=10$).

Time (s)	Exact	Retention of (λ_1, λ_2) $r=0$ (= Davison)	$r=1$ st Step	$r=2$ nd Step	$r=3$ rd Step
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	0.5780436	1.4967840	0.5839530	0.5839530	0.5782840
2.0	0.8509071	1.8463480	0.8416346	0.8507439	0.8505187
3.0	0.9479745	1.9477330	0.9422306	0.9456122	0.9474320
4.0	0.9813607	1.9813470	0.9800228	0.9789789	0.9815198
5.0	0.9932168	1.9932150	0.9940320	0.9909080	0.9935025
6.0	0.9975147	1.9975130	0.9992000	0.9948309	0.9977146
7.0	0.9990868	1.9990840	1.0011020	0.9962801	0.9991952
8.0	0.9996639	1.9996610	1.0018020	0.9967895	0.9997156
9.0	0.9998760	1.99987300	1.0020600	0.9969686	0.9998985
10.0	0.9999540	1.9999500	1.0021540	0.9970315	0.9999627

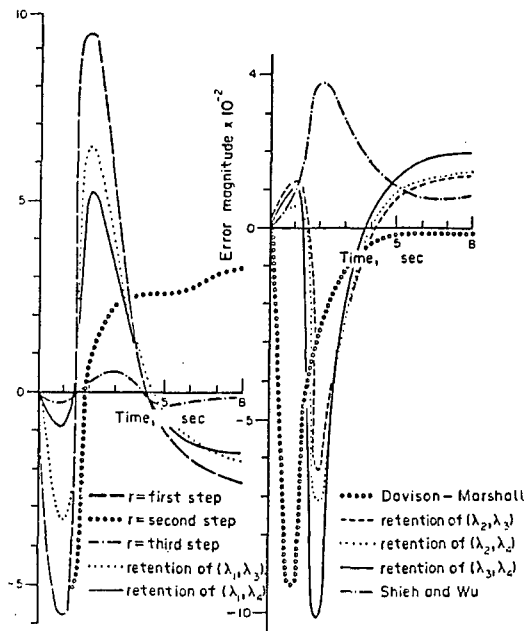


Figure 2 The magnitude of the error in the step responses versus time for various second-order models of a fourth-order system ($N=10$).

Time (s)	$r=10$ th Step	Davison-Marshall	Retention of (λ_1, λ_2) Iwai and Kubo	Retention of (λ_1, λ_2)	Retention of (λ_2, λ_3)
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	0.5780420	0.6708750	0.5814420	0.5806480	0.5659208
2.0	0.8510571	0.8841644	0.8445174	0.8457142	0.9141432
3.0	0.9476602	0.9580938	0.9437456	0.9441689	0.9747937
4.0	0.9815558	0.9846771	0.9803715	0.9836752	0.9836752
5.0	0.9934456	0.9943735	0.9938514	0.9937366	0.9849107
6.0	0.9976162	0.9979293	0.9988107	0.9986408	0.9850795
7.0	0.9990790	0.9992359	1.0006340	1.0004440	0.9851024
8.0	0.9995922	0.9997163	1.0013050	1.0011070	0.9851055
9.0	0.9997721	0.9998930	1.0015510	1.0013501	0.9851059
10.0	0.9998353	0.9999580	1.0016410	1.0014410	0.9851059

Time (s)	Retention of (λ_2, λ_4)	Retention of (λ_2, λ_4)	Shieh and Wu	Mixed method
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	0.5666237	0.5718908	0.5652160	0.9774818
2.0	0.9219896	0.9524025	0.8126888	0.8335717
3.0	0.9751871	0.9777946	0.9187061	0.7124882
4.0	0.9824800	0.9791769	0.9633157	0.6587221
5.0	0.9834687	0.9792478	0.9813023	0.6376946
6.0	0.9836025	0.9792513	0.9879216	0.6297901
7.0	0.9836206	0.9792514	0.9898243	0.6268594
8.0	0.9836230	0.9792514	0.9898789	0.6257761
9.0	0.9836230	0.9792514	0.9892986	0.6253799
10.0	0.9836233	0.9792514	0.9885777	0.6252333

第 5 章 モーメント係数の最小二乗解法を用いた安定な低次元モデルの導出

前述したように、連分数法あるいはモーメント法による低次元モデルはもとのシステムが安定でも得られるモデルは不安定となる場合がある。また、もとのシステムの特性によってはSingularityを生ずる場合がある。最後に、これらの状態が生じた場合に、モーメント係数の最小二乗解法を用いて安定な低次元モデルを得る方法を導出する。例題により、本手法で得られた低次元モデル安定で、かつ他の手法で得られたモデルに比べて誤差の二乗積分値に関して優れていることを示した。

第 6 章 結 論

本章では、以上に述べた本研究で得られた主要な結果を要約した。

このように本研究によって、低次元モデルに要求される諸特性を満たす有効なモデル低次元化法、すなわち二段階くり返し法が導出された。さらに連分数法、モーメント法、いずれを用いても特定次数の低次元モデルが得られない場合をSingularity（またはGeneralized Singularity）と呼び、低次元モデルがSingularityを生ずるもとのシステムの諸特性を検討した。また低次元モデルがSingularityを生ずるシステム、不安定となるシステムに対して、モーメント係数の最小二乗解法を用いて安定な低次元モデルを得る方法を導出した。本論文で示した手法の有効性は例題によって明らかにされている。

審 査 結 果 の 要 旨

近年、システム制御の対象は益々大規模、複雑なものとなってきた。大規模システムは本来高次元モデルでその挙動が記述されるが、それを厳密に求めるには計算機を用いても長時間を要し、オンライン同定には適していない。そこで、高次元システムの定常応答、周波数特性、過渡応答等を低次元モデルで近似する手法が研究されてきたが、それぞれに問題点があり統一的手法はまだ確立されていない。著者は線形システムを対象として、従来提案されている各手法の特徴と相互の関連を明らかにし、それに基づいて前記諸特性を同時に満す手法について研究した。本論文はその成果をまとめたもので、全編6章よりなる。

第1章は緒論である。第2章では、線形系の低次元化に関する従来の代表的手法の特徴と問題点および手法相互の関連について考察し、本研究の動機と目的を明らかにしている。

第3章では、高次元システムと低次元モデルのステップ応答の誤差の2乗積分値を評価関数とし、それを最小化するモデルの極と留数を交互に決定していく二段階繰り返しアルゴリズムを導いている。本方法により求められたモデルは、高次元システムが安定ならば必ず安定となるばかりでなく、過渡応答、定常応答とも従来のものよりも極めて優れた近似を与えることを多くのシミュレーションにより確かめている。また本アルゴリズムは、直交射影の原理からも容易に定式化でき、多重極をもつシステムや多変数系にもそのまま適用できる。これらは、本研究の最も重要な成果であり、システムの低次元化に関し新たな知見を加えたものである。

第4章では、Padé近似法と連分数法によって得られる低次元モデルの等価性を、Routh アルゴリズムを用いて証明している。ついで、ある特定の次数のモデルが得られない条件をSingularityと名付け、それを生ずる高次元システムの特性について詳細に考察している。

第5章では、低次元モデルがSingularity，あるいは不安定を生ずるシステムに対して、モーメント係数を基に最小2乗法を適用して低次元モデルのパラメータを決定する方法について述べている。本方法による低次元モデルは常に安定であるばかりでなく、この種のシステムに対する従来のモデルに比べ、誤差の2乗積分値に関しより優れた応答が得られることを例題により示している。これは興味ある成果である。

第6章は結論である。

以上要するに本論文は、線形高次元システムの低次元モデルに関し、従来の諸手法の問題点と相互の関連を明らかにするとともに、定常応答、過渡応答ともに従来のものよりも優れた近似を与える新しい手法を提案したもので、システム制御工学、回路網学に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。